SEMESTRAL

UNI

ACADEMIA
CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA
CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA
CÉSAR VALLEJO

ACADEMIA
CÉSAR VALLEJO

academiacesarvallejo.edu.pe

SEMESTRAL

UNI





Álgebra

Tema: Ecuaciones Polinomiales I

Docente: Segundo Heli Chiroque Reyes

1. Dado el polinomio $P_{(x)} = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$.
Si dos de sus raíces son 4 y 3 , además $P_{(6)} = 120$ y $P_{(x)}$ admite una raíz doble , determine
El menor valor que puede tomar d .

Resolución

Recordar

Si α es raíz de $P_{(x)} \implies P_{(x)} = (x-\alpha).Q_{(x)}$

En el problema se tiene

- $4, 3$ son raíces de $P_{(x)}$
- Grado de $P_{(x)} = 3$
- $P_{(x)}$ admite una raíz doble

$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
raíces: $\alpha; \beta; \theta$
$P(x) = a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\theta)$
$= ax^3 + (\ )x^2$

Luego

- $P_{(x)} = a\,(x-4)^2(x-3)$

Grado 3 — Grado 2 — Grado 1

Como $P_{(6)} = 120$

$P_{(6)} = a\,(6-4)^2.(6-3)$

$P_{(6)} = a(4)(3) = 120 \implies a = 10$

$\implies P_{(x)} = 10(x-4)^2(x-3)$

Piden $d = P_{(0)}$ ⟵ Término independiente

$\implies d = P_{(0)} = 10(0-4)^2(0-3) \implies d = -480$

Análogamente

- $P_{(x)} = a\,(x-4)\,(x-3)^2$

$P_{(6)} = a\,(6-4)(6-3)^2$

$P_{(6)} = a(2)(9) = 120 \implies a = \frac{20}{3}$

$\implies P_{(x)} = \frac{20}{3}(x-4)(x-3)^2$

$\implies d = P_{(0)} = \frac{20}{3}(0-4)(0-3)^2 \implies d = -240$

$d_{mín}$ (↑ $d = -480$)

Clave A

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

2. Si a y b son raíces de la ecuación cuadrática $3x^2+5x-6=0$,calcule $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}$.

Resolución

Aplicando los teoremas de Cardano

$$3x^2+5x-6=0$$

- $a+b=-\frac{5}{3}$
- $ab=-\frac{6}{3}=-2$

Piden

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}=\frac{b^3+a^3}{(ab)^3}$$

De $a+b=-\frac{5}{3}$

$$(a+b)^3=\left(-\frac{5}{3}\right)^3$$

$$a^3+b^3+3ab(a+b)=-\frac{125}{27}$$

$$a^3+b^3+3(-2)\left(-\frac{5}{3}\right)=-\frac{125}{27}$$

$$a^3+b^3+10=-\frac{125}{27}$$

$$a^3+b^3=-\frac{125}{27}-10=-\frac{395}{27}$$

Piden

$$\frac{b^3+a^3}{(ab)^3}=\frac{-\frac{395}{27}}{-8}=\frac{395}{216}$$

Clave D

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

3. Dada la ecuación cuadrática $(3x+1)(3x-1)+kx+4=3x-1$.
Determine los valores de k tal que tenga soluciones no reales.

Resolución

De $(3x+1)(3x-1)+kx+4=3x-1$

$$(3x)^2-1^2+kx+4=3x-1$$

$$9x^2+kx-3x+4=0$$

$$9x^2+(k-3)x+4=0$$

Para que la ecuación tenga soluciones no reales se debe cumplir que :

$$\Delta<0$$

$$(k-3)^2-4(9)(4)<0$$

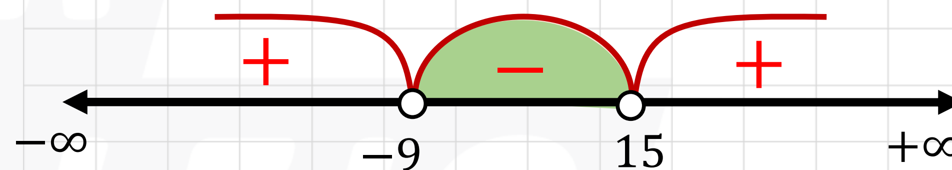
$$(k-3)^2-12^2<0$$

$$k^2-6k-135<0$$

(Aplicando puntos críticos)

$k \quad -15$
$k \quad 9$

$$(k-15)(k+9)<0$$



Por lo tanto $k \in \langle -9\,;\,15\rangle$

Clave A

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

4. Dada la ecuación cuadrática $nx^2+(2n+1)x+n=0$.
Determine los valores de n tal que tenga raíces reales.

Resolución

Para que la ecuación cuadrática

$$nx^2+(2n+1)x+n=0 \quad ; \quad n \neq 0$$

tenga raíces reales se debe cumplir que :

$$\Delta \geq 0$$

$$(2n+1)^2-4(n)(n)\geq 0$$

$$4n^2+4n+1-4n^2\geq 0$$

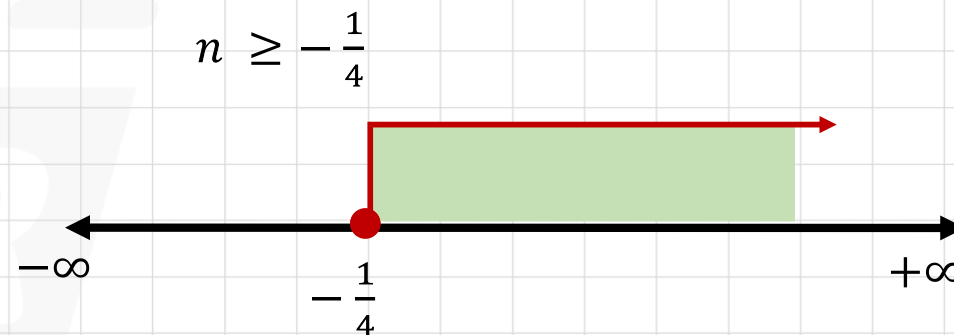
$$4n+1\geq 0$$

$$4n\geq -1$$

$\Delta>0$

$\Delta=0$ → $\Delta\geq 0$

$$n\geq -\frac{1}{4}$$



Por lo tanto $n\in\left[-\frac{1}{4}\,;\,+\infty\right\rangle-\{0\}$

Clave D

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

5. La ecuación $\frac{x^2+3x}{5x+12}=\frac{m-1}{m+1}$ en x, tiene raíces de signos opuestos y el mismo valor absoluto.
Dada las siguientes proposiciones :
I. $m<3$ II. $m\in[2;6]$ II. $m\in[5;10]$
Indique cuál o cuáles son las correctas .

Resolución

Se tiene la ecuación de raíces simétricas

Sean sus raíces : $x_1=\alpha\,,x_2=-\alpha$

De la ecuación

$$\frac{x^2+3x}{5x+12}=\frac{m-1}{m+1}$$

$$(m+1)(x^2+3x)=(m-1)(5x+12)$$

$$(m+1)x^2+3(m+1)x-5(m-1)x-12(m-1)=0$$

$$(m+1)x^2+(8-2m)x-12(m-1)=0$$

Por dato

- $x_1+x_2=0 \implies 8-2m=0 \implies m=4$

I. Incorrecta

Porque 4 no es menor que 3.

II. Correcta

Porque $4\in[2;6]$.

III. Incorrecta

Porque $4\notin[5;10]$.

Clave B

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

6. Si la ecuación $\alpha x^2 - 3x - 5\alpha x + 6\alpha - 9 = 0$, de raíces x_1 y x_2 donde se cumple $x_1 + x_2 = \frac{2}{3}x_1x_2$. Determine el valor de $3(x_1 + x_2) + \alpha$.

Resolución

La ecuación dada, equivale a:

$$\alpha x^2 - (3 + 5\alpha)x + 6\alpha - 9 = 0$$

$$+ \quad - \quad +$$

Aplicando el teorema de Cardano tenemos:

$$x_1 + x_2 = \frac{3 + 5\alpha}{\alpha} \qquad x_1 . x_2 = \frac{6\alpha - 9}{\alpha}$$

Ahora reemplazamos en el dato

$$\underbrace{x_1 + x_2}_{} = \frac{2}{3}\underbrace{x_1 . x_2}_{}$$

$$\frac{3 + 5\alpha}{\alpha} = \frac{2}{3}\left(\frac{6\alpha - 9}{\alpha}\right)$$

$$9 + 15\alpha = 12\alpha - 18$$

$$3\alpha = -27$$

$$\alpha = -9$$

Finalmente lo reemplazamos en

$$x_1 + x_2 = \frac{3 + 5\alpha}{\alpha} = \frac{3 + 5(-9)}{-9} = \left(\frac{14}{3}\right)$$

Piden

$$3(x_1 + x_2) + \alpha = 3\left(\frac{14}{3}\right) - 9 = 5$$

Clave B

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

7. Sea la ecuación bicuadrada $x^4+(m-5)x^3+(1-m)x^2+(n-3)x+n-2=0$

de raíces x_1, x_2, x_3, x_4. Determine $F=x_1^6+x_2^6+x_3^6+x_4^6$

Resolución

Recordar

En la ecuación bicuadrada

$ax^4+bx^2+c=0; \quad a\neq 0$

Sus raíces tienen la forma

- $\alpha ; -\alpha ; \beta ; -\beta$
- $\alpha^2+\beta^2=-\dfrac{b}{a}$
- $\alpha^2.\beta^2=\dfrac{c}{a}$

Piden $F=x_1^6+x_2^6+x_3^6+x_4^6$

$F=\alpha^6+(-\alpha)^6+\beta^6+(-\beta)^6$

$F=\alpha^6+\alpha^6+\beta^6+\beta^6$

$F=2(\alpha^6+\beta^6)$

- Hallando $\alpha^6+\beta^6$

$m-5=0 \quad \wedge \quad n-3=0$

$m=5 \quad \wedge \quad n=3$

$\Longrightarrow \quad x^4-4x^2+1=0$

Aplicando lo recordado

$\alpha^2+\beta^2=4$ $\quad$ $\alpha^2.\beta^2=1$

$(\alpha^2+\beta^2)^3=(4)^3$

$\alpha^6+\beta^6+3\underbrace{\alpha^2\beta^2}_{1}\underbrace{(\alpha^2+\beta^2)}_{4}=64$

(3 · 1 · 4 = 12)

$\alpha^6+\beta^6=52$

Reemplazando en

$F=2(\alpha^6+\beta^6)=104$

Clave A

8. La siguiente ecuación bicuadrada $x^4-(n+28)x^2+n^2=0$ presenta raíces que se encuentran en progresión aritmética. Determine $\sqrt{n+4}$; $n\in\mathbb{Z}^+$

Resolución

Recordar

En la ecuación bicuadrada

$ax^4+bx^2+c=0;\quad a\neq 0$

Sus raíces tienen la forma:

- $\alpha\,;-\alpha\,;\beta\,;-\beta$
- $\alpha^2+\beta^2=-\dfrac{b}{a}$
- $\alpha^2.\beta^2=\dfrac{c}{a}$

Si sus raíces están en P.A. tienen la forma

- $-3k\,;-k\,;k\,;3k$

Aplicando lo recordado

- $k^2+(3k)^2=n+28$

$$10k^2=n+28$$

$$k^2=\frac{n+28}{10}$$

- $k^2.(3k)^2=n^2$

$$9k^2.k^2=n^2$$

$$9\left(\frac{n+28}{10}\right)\left(\frac{n+28}{10}\right)=n^2$$

$$\frac{9(n+28)^2}{100}=n^2$$

$$9(n+28)^2=100n^2$$

$$\big(3(n+28)\big)^2=(10n)^2$$

$$\big(3(n+28)\big)^2-(10n)^2=0$$

$$(3(n+28)+10n)(3(n+28)-10n)=0$$

$$(13n+84)(84-7n)=0$$

$$n=-\frac{84}{13}\quad\vee\quad n=12$$

Como $n\in\mathbb{Z}^+\implies n=12$

Piden $\sqrt{n+4}=\sqrt{12+4}=4$

Clave B

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO

9. Según la ecuación bicuadrada $x^4 - 5x^2 = a^2 - 9a + 14$

Indique la secuencia correcta de verdad (V)o falso (F)según corresponda

I. Si $a \in \langle -\infty; 2\rangle \cup \langle 7; +\infty\rangle$, todas sus raíces no son reales II. Si $a > 7$, todas sus raíces son reales.

III. Si $a \in \langle 2; 7\rangle$, al menos 2 raíces son reales

Resolución

La ecuación dada, equivale a:

$$x^4 - 5x^2 - (a^2 - 9a + 14) = 0$$

$$x^4 - 5x^2 - (a-7)(a-2) = 0$$

$x^2 \quad (a-7)$

$x^2 \quad -(a-2)$

$$\left(x^2 + (a-7)\right)\left(x^2 - (a-2)\right) = 0$$

Luego

- $x^2 + (a-7) = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{7-a}$
- $x^2 - (a-2) = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{a-2}$

I. Verdadera

Para que las raíces sean no reales

$a - 2 < 0 \quad \wedge \quad 7 - a < 0$

$a < 2 \quad \wedge \quad a > 7$

$\Rightarrow \quad a \in \langle -\infty; 2\rangle \vee \langle 7; +\infty\rangle$, 2 raices son reales y 2 no reales

II. Falsa

Si $a > 7 \Rightarrow x = \underbrace{\pm\sqrt{7-a}}_{(no\ reales)} \vee x = \underbrace{\pm\sqrt{a-2}}_{(reales)}$

III. Verdadera

Porque si $a \in \langle 2 ; 7\rangle$

las 4 raíces son reales

Clave A

ACADEMIA CÉSAR VALLEJO



GRACIAS

SÍGUENOS:

academiacesarvallejo.edu.pe